

MATA KULIAH

RISET OPERASIONAL

[KODE/SKS : KK023311/ 2 SKS]

METODE SIMPLEKS

Pengubahan ke dalam bentuk baku

**Untuk menyempurnakan metode grafik .
Diperkenalkan oleh : George B Dantzig**

Ciri ciri :

- 1. Semua kendala berada dalam persamaan dengan nilai kanan tidak negatif.**
- 2. Semua variabel yang tidak terlibat tidak dapat bernilai negatif**
- 3. Fungsi obyektif bisa maksimisasi atau minimisasi**

- **Variabel Slack (Kurang) dan Surplus**

$$\text{Variabel Slack (Kurang)} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

Untuk diubah menjadi suatu persamaan dengan **menambah** sebuah variabel tak negatif baru pada ruas kirinya.

Contoh : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 3$

Diubah menjadi persamaan menjadi : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 3$

$$\text{Variabel Surplus} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$$

Untuk diubah menjadi suatu persamaan dengan **mengurangkan** sebuah variabel tak negatif baru pada ruas kirinya.

Contoh $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 3$
:

Diubah menjadi persamaan menjadi : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 3$

• Variabel buatan (artificial variable)

- Pada ruas kiri setiap fungsi batasan yang tidak mengandung variabel slack dapat ditambahkan variabel buatan. Dengan demikian tiap fungsi pembatas akan mempunyai variabel slack dan buatan.
- Contoh: (***)

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 5$$

$$7x_1 + 8x_2 = 10$$

Persamaan

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - x_4 = 5$$

$$7x_1 + 8x_2 = 10$$

variabel buatan x_5 dan x_6

$$\begin{matrix} 2x \\ 3 \\ 1 \end{matrix} + 3x_2 + x_3 =$$

$$\begin{matrix} x \\ x \\ 1 \end{matrix} + 4x_2 - x_4 =$$

$$\begin{matrix} x \\ x \\ 1 \end{matrix} = 5$$

$$7x_1 + 8x_2 + x_5 =$$

► Pengubahan variabel

variabel yang bernilai tak terbatas (artinya bisa positif atau negatif) maka perlu diubah kebentuk variabel yang bernilai non negatif
contoh

maksimumkan : $Z = 15x_1 + 20x_2$

terhadap kendala :

$$3x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ tak terbatas}$$

► Model Umum Metode Simpleks.

1. Kasus Maksimisasi.

Fungsi Tujuan : Maksimumkan

$$Z - C_1X_1 - C_2X_2 - \dots - C_nX_n - OS_1 - OS_2 - \dots - OS_n = NK$$

Fungsi Pembatas :

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \dots + a_{1n}X_n + S_1 + OS_2 + \dots + OS_n = b_1$$

$$a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \dots + a_{2n}X_n + OS_1 + S_2 + \dots + OS_n = b_2$$

..... = ...

$$a_{m1}X_{m1} + a_{m2}X_{m2} + \dots + a_{mn}X_n + S_1 + OS_2 + \dots + OS_n = b_m$$

Var. Kegiatan

Slack Var

Tabel Simpleks :

Var. Dasar	Z	X_1	X_2	X_n	S_1	S_2	S_n	NK
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	$-C_n$	0	0	0	0	0
S_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
S_2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
...
S_n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	0	1	b_m

2. Kasus Minimisasi

Fungsi Tujuan : Minimumkan

$$Z - C_1X_1 - C_2X_2 - \dots - C_nX_n - OS_1 - OS_2 - \dots - OS_n = NK$$

Fungsi Pembatas :

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \dots + a_{1n}X_n - S_1 - OS_2 - \dots - OS_n = b_1$$

$$a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \dots + a_{2n}X_n - OS_1 - S_2 - \dots - OS_n = b_2$$

..... = ...

$$a_{m1}X_{m1} + a_{m2}X_{m2} + \dots + a_{mn}X_n - S_1 - OS_2 - \dots - S_n = b_m$$

[]

[]

var.kegiatan

Surplus var.

Tabel Simpleks :

Var. Dasar	Z	X_1	X_2	X_n	S_1	S_2	S_n	NK
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	$-C_n$	0	0	0	0	0
S_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	-1	0	0	0	b_1
S_2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	-1	0	0	b_2
...
S_n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	0	-1	b_m

► Langkah-langkah Metode Simpleks

1. Rumuskan persoalan PL ke dalam model umum PL (fungsi tujuan dan fungsi pembatas).
2. Merubah model umum PL menjadi model simpleks :
 - a. Fungsi Pembatas : tambahkan slack variabel dan/atau surplus variabel, dan/atau variabel buatan (artifisial var).

Contoh soal :

Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi : perakitan dan pemolesan. Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesannya hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan untuk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan. Laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing 80.000 dan 60.000 . Berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan ?

Model Simpleks :

1. Fungsi Tujuan : Maksimumkan

$$Z - 8X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

2. Fungsi Pembatas :

$$4X_1 + 2X_2 + S_1 + 0S_2 = 60$$

$$2X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 1S_2 = 48$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
----------------	---	----------------	----------------	----------------	----------------	----

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z						
S ₁						
S ₂						

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-8	-6	0	0	0
S ₁						
S ₂						

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-8	-6	0	0	0
S ₁	0	4	2	1	0	60
S ₂						

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-8	-6	0	0	0
S ₁	0	4	2	1	0	60
S ₂	0	2	4	0	1	48

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Iterasi Awal (Iterasi-0)

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-8	-6	0	0	0
S ₁	0	4	2	1	0	60
S ₂	0	2	4	0	1	48

2. Iterasi-1 :

a. Menentukan kolom kunci :

Kolom kunci : kolom yang mempunyai koefisien fungsi tujuan yang bernilai negatif terbesar.

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	NK
Z	1	-8	-6	0	0	0
s_1	0	4	2	1	0	60
s_2	0	2	4	0	1	48

b. Menentukan baris kunci :

Baris kunci ditentukan berdasarkan nilai indeks terkecil.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK	Indeks
Z	1	-8	-6	0	0	0	-
S ₁	0	4	2	1	0	60	15
S ₂	0	2	4	0	1	48	24

angka Kunci



Cara menentukan indeks

= Nilai Kanan (NK)
Kolom Kunci (KK)

C. Perubahan-perubahan nilai baris :

- Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci
- Nilai baris yang lain = Baris lama – (Nilai baris kunci baru) x angka kolom kunci baris ybs.

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	NK
Z						
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	15
s_2						

C. Perubahan-perubahan nilai baris :

- Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci
- Nilai baris yang lain = Baris lama – (Nilai baris kunci baru) x angka kolom kunci baris ybs.

Variabel Dasar	Z	X₁	X₂	S₁	S₂	NK
Z						
X₁	0	1	½	¼	0	15
S₂	0	0	3	- ½	1	18

C. Perubahan-perubahan nilai baris :

- Nilai baris kunci baru

$$= (\text{Nilai baris kunci lama}) : n\text{-angka kunci}$$

- Nilai baris yang lain

$$= \text{Baris lama} - (\text{Nilai baris kunci baru}) \times \text{angka kolom kunci baris ybs.}$$

Variabel Dasar	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	NK
Z	1	0	- 2	2	0	120
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	15
s_2	0	0	3	$-\frac{1}{2}$	1	18

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	0	- 2	2	0	120	-
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	15	30
S_2	0	0	3	$-\frac{1}{2}$	1	18	6

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	0	- 2	2	0	120	-
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	15	30
S_2	0	0	3	$-\frac{1}{2}$	1	18	6

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z							
X_1							
X_2	0	0	1	- 1/6	1/3	6	-

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	0	0	$5/3$	$2/3$	132	-
X_1	0	1	0	$1/3$	$-1/6$	12	-
X_2	0	0	1	$-1/6$	$1/3$	6	-

Pada iterasi-2 terlihat bahwa **koefisien fungsi tujuan sudah tidak ada lagi yang mempunyai nilai negatif**, proses perubahan selesai dan ini menunjukkan penyelesaian persoalan linear dengan metode simpleks sudah mencapai optimum dengan hasil sbb :

$$X_1 = 12 \text{ dan } X_2 = 6$$

dengan $Z_{\text{makasimum}} = \text{Rp } 132.000.-$

► TUGAS 2

Model Program Linear

1. Fungsi Tujuan :

Maksimumkan : $Z=15X_1 + 10X_2$
(Dlm Rp10.000)

2. Fungsi Pembatas :

- 2.1. Bahan A : $X_1 + X_2 \leq 600$
- 2.2. Bahan B : $2X_1 + X_2 \leq 1000$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
----------------	-----	-------	-------	-------	-------	----

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S ₁						
S ₂						

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	600
S ₂						

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	600
S ₂						

► Tabel Simpleks :

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	600
S ₂	0	2	1	0	1	1000

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Iterasi Awal (Iterasi-0)

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	600
S ₂	0	2	1	0	1	1000

2. Iterasi-1 :

a. Menentukan kolom kunci :

Kolom kunci : kolom yang mempunyai koefisien fungsi tujuan yang bernilai negatif terbesar.

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	600
S_2	0	2	1	0	1	1000

b. Menentukan baris kunci :

NK fungsi pembatas

- Nilai Indeks : -----

Nilai kolom kunci f-pembatas

- Baris kunci : nilai indeks yang terkecil (positif).

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK	Indeks
Z	1	-15	-10	0	0	0	-
S ₁	0	1	1	1	0	600	600
S ₂	0	2	1	0	1	1000	500

Angka Kunci

C. Perubahan-perubahan nilai baris :

- Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci
- Nilai baris yang lain = Baris lama – (Nilai baris kunci baru) x
angka kolom kunci baris ybs.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK
Z						
S ₁						
X ₁	0	1	½	0	½	500

C. Perubahan-perubahan nilai baris :

- Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci
- Nilai baris yang lain = Baris lama – (Nilai baris kunci baru) x
angka kolom kunci baris ybs.

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z						
S_1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	100
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	500

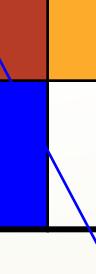
C. Perubahan-perubahan nilai baris :

- Nilai baris kunci baru = (Nilai baris kunci lama) : n-angka kunci
- Nilai baris yang lain = Baris lama – (Nilai baris kunci baru) x
angka kolom kunci baris ybs.

Variabel Dasar	Z	X₁	X₂	S₁	S₂	NK
Z	1	0	-2½	0	7½	7500
S₁	0	0	½	1	- ½	100
X₁	0	1	½	0	½	500

3. Iterasi-2 : perhatikan apakah koefisien fungsi tujuan pada Tabel simpleks masih ada yang bernilai negatif.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	NK	Indeks
Z	1	0	-2½	0	7½	7500	-
S ₁	0	0	½	1	- ½	100	200
X ₁	0	1	½	0	½	500	1000



Angka Kunci

- Merubah baris pada angka kunci dan baris-baris lainnya.

Variabel Dasar	Z	X₁	X₂	S₁	S₂	NK	Indeks
Z							
X₂	0	0	1	2	-1	200	-
X₁							

- Merubah baris pada angka kunci dan baris-baris lainnya.

Variabel Dasar	Z	X₁	X₂	S₁	S₂	NK	Indeks
Z							
X₂	0	0	1	2	-1	200	-
X₁	0	1	0	-1	1	400	-

- Merubah baris pada angka kunci dan baris-baris lainnya.

Variabel Dasar	Z	X₁	X₂	S₁	S₂	NK	Indeks
Z	1	1	0	5	5	8000	-
X₂	0	0	1	2	-1	200	-
X₁	0	1	0	-1	1	400	-

Pada iterasi-2 terlihat bahwa koefisien fungsi tujuan sudah tidak ada lagi yang mempunyai nilai negatif, proses perubahan selesai dan ini menunjukkan penyelesaian persoalan linear dengan metode simpleks sudah mencapai optimum dengan hasil sbb :

$$X_1 = 400 \text{ dan } X_2 = 200 \text{ dengan } Z_{\text{maksimum}} = \text{Rp } 8000.-$$

Contoh-2 :

Model Program Linear

Fungsi Tujuan :

$$\text{Maksimumkan : } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Fungsi Pembatas :

$$X_1 + X_2 \leq 15$$

$$2X_1 + X_2 \leq 28$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Model Simpleks

Fungsi Tujuan : Maksimumkan

$$Z - X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

Fungsi Pembatas :

$$X_1 + X_2 + S_1 = 15$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 28$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Tabel Simpleks

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK

Tabel Simpleks

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z							
S ₁							
S ₂							
S ₃							

Tabel Simpleks

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
S ₁							
S ₂							
S ₃							

Tabel Simpleks

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	0	15
S ₂							
S ₃							

Tabel Simpleks

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	0	15
S ₂	0	2	1	0	1	0	28
S ₃							

Tabel Simpleks

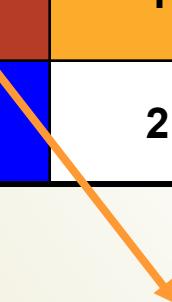
Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
S ₁	0	1	1	1	0	0	15
S ₂	0	2	1	0	1	0	28
S ₃	0	1	2	0	0	1	20

(a). Iterasi Awal (Iterasi-0) :

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	-3	-2	0	0	0	0	-
S_1	1	1	1	0	0	15	15
S_2	2	1	0	1	0	28	14
S_3	1	2	0	0	1	20	20

(a). Iterasi Awal (Iterasi-0) :

Variabel Dasar	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK	Indeks
Z	-3	-2	0	0	0	0	-
S ₁	1	1	1	0	0	15	15
S ₂	2	1	0	1	0	28	14
S ₃	1	2	0	0	1	20	20



Angka Kunci

(b). Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z							
S_1							
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3							

(b). Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z							
S_1							
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	6	-

(b). Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z							
S_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	-
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	6	-

(b). Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	42	-
S_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	-
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	6	-

(c). Iterasi-2

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	42	-
S_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	28
S_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	6	4

Angka Kunci

Perubahan-perubahan baris kunci dan baris lainnya.

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z							
X_2	0	1	2	-1	0	2	-
X_1							
S_3							

Perubahan-perubahan baris kunci dan baris lainnya.

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z							
X_2	0	1	2	-1	0	2	-
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3							

Perubahan-perubahan baris kunci dan baris lainnya.

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z							
X_2	0	1	2	-1	0	2	-
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3	0	0	0	-3	1	1	-

Perubahan-perubahan baris kunci dan baris lainnya.

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	0	0	1	1	0	43	-
X_2	0	1	2	-1	0	2	-
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	14	-
S_3	0	0	0	-3	1	1	-

Pada iterasi-2 terlihat bahwa koefisien fungsi tujuan sudah tidak ada lagi yang mempunyai nilai negatif, proses perubahan selesai dan ini menunjukkan penyelesaian perhitungan persoalan program linear dengan metode simpleks sudah mencapai optimum dengan rincian sbb :

$$X_1 = 13; X_2 = 2,$$

$$Z_{\text{maksimum}} = 43$$