

BAB 3

DUALITAS dan ANALISIS SENSITIVITAS

Kegunaan Dualitas dan analisis sensitivitas

1. Dualitas lebih banyak bermanfaat untuk melakukan pengujian/pengecekan apakah nilai-nilai yang telah dihasilkan dengan metode simplex telah benar dan hasilnya dapat digunakan untuk pengambilan keputusan manajemen
2. Sementara itu, analisis sensitivitas selain digunakan untuk pengujian/pengecekan, analisis ini lebih bermanfaat untuk menghindari pengulangan perhitungan dari awal, apabila terjadi perubahan-perubahan pada masalah LP simplex. Perubahan yang dimaksud misalnya :
 - a. perubahan nilai koefisien dalam fungsi tujuan, misalkan dari contoh sebelumnya, karena tuntutan keadaan keuntungan yang diharapkan dari sepatu karet tidak lagi Rp 300.000,- tapi menjadi Rp 500.000,-/unit, dst.
 - b. perubahan pada kapasitas maksimal mesin, misalkan karena mesin kedua diperbaiki, diganti oli-nya, dan disetup ulang, maka bila sebelumnya hanya bisa menyala 15 jam, saat ini mampu menyala hingga 16 jam.

Jika hal tersebut terjadi, fungsi tujuan dan batasan akan berubah, dan apabila dilakukan perhitungan lagi dari awal tentunya akan memakan waktu yang cukup lama, disamping risiko kesalahan hitung yang mungkin muncul. Oleh karena itu analisis sensitivitas diperlukan untuk sesegera mungkin mendapatkan hasil optimal yang baru dari perubahan-perubahan tersebut.

Untuk memahami konsep dualitas, langkah pertama yang perlu dipahami adalah bahwa sebenarnya Dualitas adalah 'kebalikan' masalah Simplex, dan masalah Simplex sendiri selanjutnya sering disebut dengan masalah Primal. Jadi masalah Dual adalah 'kebalikan' dari masalah Primal (simplex)

Dari contoh kasus di atas, masalah Primal (simplex)-nya adalah :

Fungsi tujuan : Maksimalkan $Z = 3X_1 + 5X_2$

Dengan batasan :

$$\begin{array}{lll} \text{Mesin A} & 2X_1 & \leq 8 \\ \text{Mesin B} & & 3X_2 \leq 15 \\ \text{Mesin C} & 6X_1 + 5X_2 & \leq 30, \\ & \text{dimana } X_1 \text{ dan } X_2 & \geq 0 \end{array}$$

Masih ingat khan, bahwa kedua fungsi di atas berasal dari tabel penyederhanaan yg dibuat pada kasus berikut ini :

Mesin	Merk	X1	X2	Kapasitas maksimum
	A	2	0	8
	B	0	3	15
	C	6	5	30
Kontribusi terhadap keuntungan / lusin (dalam Rp 100.000,-)		3	5	

Tabel penyederhanaan kasus Primal (simplex) di atas apabila dijadikan Dual akan menjadi :

	A	B	C	
X1	2	0	6	3
X2	0	3	5	5
	8	15	30	

Atau apabila notasi A, B, dan C serta X1 dan X2 diganti dengan notasi umum dalam Dual akan menjadi :

	Y1	Y2	Y3	
Batasan 1	2	0	6	3
Batasan 2	0	3	5	5
	8	15	30	

Sehingga fungsi tujuan dan batasan Dual-nya dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan ketika dulu mendapatkan fungsi tujuan dan batasan pada Primal (simplex)-nya.

Dengan demikian fungsi tujuan dan batasan Dual-nya (dan ini merupakan 'kebalikan' dari fs. Tujuan dan batasan Primal-nya) adalah :

Fungsi Tujuannya :

Minimalkan $Y = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$ à perhatikan mjd Minimalisasi

Dengan batasan :

$$\begin{array}{rcl} 2Y_1 & + & 6Y_3 \geq 3 \\ 3Y_2 & + & 5Y_3 \geq 5 \end{array} \quad \text{à tanda juga berubah}$$

Dimana $Y_1, Y_2, \text{ dan } Y_3 \geq 0$

Perhatikan !

Dalam fungsi tujuan dan batasan Dual tersebut :

1. Fungsi tujuannya dari maksimalisasi menjadi minimalisasi
2. Nilai koefisien pada fungsi tujuan (8, 15, dan 30) sebelumnya adalah nilai kanan (NK) dari fungsi batasan Primal (simplex)-nya.
3. Sebaliknya nilai kanan batasan (3 dan 5) sebelumnya adalah nilai koefisien fungsi tujuan pada kasus Primal (simplex)
4. Nilai koefisien pada fungsi batasan Dual adalah 'pembacaan' vertikal dari nilai koefisien di batasan Primalnya
5. Jumlah batasan (3) akan menjadi jumlah variabel dalam fungsi tujuan Dualnya (Y_1 s.d. Y_3)

Bila disandingkan kedua masalah Primal dan Dual di atas, akan terlihat :

Fungsi tujuan Primal :
Maksimalkan $Z = 3X_1 + 5X_2$

Dengan batasan :

Mesin A $2X_1 \leq 8$
Mesin B $3X_2 \leq 15$
Mesin C $6X_1 + 5X_2 \leq 30$,

dimana $X_1 \text{ dan } X_2 \geq 0$

Fungsi Tujuan Dual :
Minimalkan $Y = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$

Dengan batasan :

$$\begin{array}{rcl} 2Y_1 & + & 6Y_3 \geq 3 \\ & & 3Y_2 + 5Y_3 \geq 5 \end{array}$$

Dimana $Y_1, Y_2, \text{ dan } Y_3 \geq 0$

Selanjutnya apa kegunaan atau manfaat hubungan antara Primal dan Dual tersebut ?

Seperti telah dijelaskan di bagian awal bab ini, maka salah satu manfaat Dualitas adalah untuk melakukan pengecekan apakah nilai-nilai yang telah dihasilkan dengan metode

simplex telah benar dan hasilnya dapat digunakan untuk pengambilan keputusan manajemen.

Namun demikian, sebelumnya perlu kita perhatikan hasil optimal simplex dari kasus sebelumnya.

	X1	X2	X3	X4	X5	NK
Z	0	0	0	5/6	1/2	27,5
X3	0	0	1	5/9	-1/3	6 1/3
X2	0	1	0	1/3	0	5
X1	1	0	0	- 5/18	1/6	5/6

Dari tabel optimal simplex di atas telah disimpulkan bahwa :

1. Jumlah produksi untuk sepatu karet (X1) sebaiknya dilakukan dalam jumlah 5/6 (lihat kolom NK, baris X1). Sementara itu sepatu kulit sebaiknya diproduksi sebanyak 5 (lihat kolom NK, baris X2)
2. Dengan hasil pada poin 1 di atas, maka keuntungan yang akan diterima oleh perusahaan adalah sebesar 27,5 atau 2.750.000 (lihat kolom NK, baris Z)

Selain nilai 5/6; 5; dan 27,5 tersebut di atas ternyata nilai yang bermanfaat tidak hanya itu. Ada beberapa nilai yang juga penting.

Perhatikan nilai-nilai dibawah variabel dasar X3, X4, dan X5 pada baris Z tersebut di atas. Nilainya adalah **0, 5/6, dan 1/2**. Nilai-nilai ini secara umum dapat diartikan sebagai besarnya tambahan keuntungan perusahaan apabila masing-masing kapasitas batasan bertambah sebesar 1 unit kapasitas (misalnya mesin A dari 8 jam menjadi 9 jam, mesin B dari 15 jam menjadi 16 jam). Dengan demikian dapat diartikan bahwa :

1. Nilai 0 (nol) di bawah variabel dasar X3 menunjukkan bahwa apabila mesin A (batasan 1) kapasitasnya bertambah dari 8 jam menjadi 9 jam, maka keuntungan perusahaan akan bertambah sebesar 0 atau tetap sebesar 27,5.
2. Nilai 5/6 di bawah variabel dasar X4 menunjukkan bahwa apabila mesin B (batasan 2) kapasitasnya bertambah dari 15 jam menjadi 16 jam, maka keuntungan perusahaan akan bertambah sebesar 5/6 sehingga dari 27.5 menjadi $27,5 + 5/6 = 28,34$
3. Nilai 1/2 di bawah variabel dasar X5 menunjukkan bahwa apabila mesin C (batasan 3) kapasitasnya bertambah dari 30 jam menjadi 31 jam, maka keuntungan perusahaan akan bertambah sebesar 1/2 sehingga dari 27,5 menjadi $27,5 + 0,5 = 28$.

Benarkah demikian ?

Untuk membuktikannya, perhatikan perhitungan berikut ini :

Batasan 2

Kapasitasnya bertambah 1 jam sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} 3X_2 &\leq 16, \text{ bila dihubungkan dengan batasan ketiga} \\ 6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \end{aligned}$$

Bila batasan 2 dikalikan 5 dan batasan 3 dikalikan 3, hasilnya adalah :

$$\begin{aligned} 3X_2 &\leq 16 \quad (\times 5) \\ 6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \quad (\times 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15X_2 &\leq 80 \\ 18X_1 + 15X_2 &\leq 90 \end{aligned}$$

$$\hline - 18X_1 \qquad \leq -10$$

$$X_1 = -10 / -18$$

$X_1 = 5/9$, sementara itu nilai X_2 nya adalah :

$$3X_2 \leq 16$$

$X_2 \leq 16/3$, bila nilai X_1 dan X_2 ini dimasukkan ke fs tujuan :

$$\begin{aligned} Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ &= 3(5/9) + 5(16/3) \\ &= \mathbf{28,34} \end{aligned}$$

Jadi keuntungan yang baru ini $28,34 - 27,5 = 0,84$ atau \approx dengan $5/6$ dan ini terbukti bahwa apabila kapasitas mesin ke-2 (batasan 2) bertambah dari 15 menjadi 16, keuntungan akan bertambah $5/6$.

Selanjutnya, selain menunjukkan tabahan keuntungan yang diakibatkan oleh penambahan kapasitas sebesar 1 unit, nilai-nilai dibawah kolom variabel dasar (X_3 , X_4 , dan X_5) tersebut atau nilai **0**, **5/6**, dan **1/2** tersebut apabila dimasukkan ke dalam fungsi tujuan Dual-nya akan menghasilkan keuntungan yang sama ketika keuntungan tersebut diperoleh dari fungsi tujuan Primal-nya (hal ini sekaligus dapat digunakan untuk memastikan bahwa hasil optimal pada masalah Primal/Simplex-nya sudah benar).

Untuk lebih jelasnya, perhatikan perhitungan di bawah ini :

Fungsi tujuan Dual :

$$\begin{aligned} \text{Minimalkan } Y &= 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3 \\ &= 8(\mathbf{0}) + 15(\mathbf{5/6}) + 30(\mathbf{1/2}) \\ &= 27,5 \hat{=} \text{ nilai ini sama dengan yang dihasilkan dari fungsi tujuan} \\ &\quad \text{primal/simplex sebelumnya} \end{aligned}$$

Analisis Sensitivitas

Seperti dijelaskan di atas selain dapat digunakan untuk menguji kebenaran hasil optimal Primal/Simplexnya, analisis sensitifitas sangat bermanfaat untuk menghindari pengulangan perhitungan dari awal, apabila terjadi perubahan-perubahan pada masalah LP simplex.

Pengecekan atau pengujian hasil optimal Primal/simplex dapat dilakukan dengan memanfaatkan beberapa nilai pada tabel simplex optimalnya, khususnya nilai-nilai yang berada di bawah variabel dasar, kecuali di baris tujuan (Z). Perhatikan lagi tabel optimal simplex yang sudah diperoleh sebelumnya :

	X1	X2	X3	X4	X5	NK
Z	0	0	0	5/6	1/2	27,5
X3	0	0	1	5/9	-1/3	6 1/3
X2	0	1	0	1/3	0	5
X1	1	0	0	- 5/18	1/6	5/6

Dari tabel di atas, nilai-nilai yang dimaksud adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dan ini semua merupakan sebuah matrik.}$$

Matrik inilah yang kemudian dimanfaatkan untuk berbagai keperluan di atas. Selanjutnya untuk memanfaatkan matrik tersebut, langkah-langkahnya adalah :

Pengujian/pembuktian pertama

Langkah 1

Menentukan koefisien-koefisien pada fungsi tujuan Primal/simplex yang berhubungan dengan variabel dasar iterasi yang bersangkutan. Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa urutan variabel yang dimaksud adalah X2, dan X1. Sementara itu fungsi tujuan Primal/simplex-nya adalah $Z = 3X1 + 5X2$, sehingga koefisien yang dimaksud adalah 5 dan 3.

Langkah 2

Meng-kalikan nilai koefisien tersebut dengan matrik 3x3 di atas, dan perhitungan adalah :

$$(0, 5, 3) \begin{pmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{pmatrix} =$$

$$(0x_1 + 5x_0 + 3x_0; \quad 0x_5/9 + 5x_1/3 + 3x_5/18; \quad 0x_1/3 + 5x_0 + 3x_1/6) = (0, 5/6, 1/2)$$

(0, 5/6, 1/2) à hasil ini tidak lain adalah nilai yang ada di bawah variabel dasar X3, X4, X5 pada baris Z tabel optimal Primal/simplex di atas, dan yang sebelumnya telah dijelaskan merupakan nilai-nilai yang menunjukkan tabahan keuntungan yang diakibatkan oleh penambahan kapasitas sebesar 1 unit.

Dengan hasil ini dapat dikatakan bahwa nilai-nilai tersebut adalah benar dan berarti pula manfaat dari nilai-nilai tersebut juga benar pula dan dapat dipercaya.

Pengujian/pembuktian pertama

Langkah 1

Menentukan nilai kanan dari setiap batasan yang ada dalam fungsi batasan Primal/simplex-nya. Dari contoh kasus yang ada, nilai yang dimaksud adalah 8, 15, dan 30.

Langkah 2

Meng-kalikan nilai yang telah ditentukan tersebut dengan matrix di atas, dan perhitungannya adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x8 + 5/9x15 + -1/3x30 \\ 0x8 + 1/3x15 + 0x30 \\ 0x8 + -5/18x15 + 1/6x30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \ 1/3 \\ 5 \\ 5/6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{à } X_2 \\ \text{à } X_1 \end{matrix}$$

Perhatikan hasil di atas ! Hasil tersebut tidak lain adalah nilai pada kolom NK tabel optimal Primal/simplex-nya. Dengan demikian memang terbukti bahwa nilai yang dihasilkan oleh tabel simplex adalah benar dan dapat dipercaya.

Dengan hasil di atas, dapat disimpulkan bahwa matrik 3x3 yang diperoleh dari nilai-nilai dalam tabel Primal/simplex optimal dapat digunakan untuk memperoleh nilai optimal produksi yang harus dilakukan ($X_1 = 5/6$ dan $X_2 = 5$).

Dengan demikian apabila terjadi perubahan pada nilai kanan batasan (misalkan kapasitas mesin B dinaikkan dari 15 jam menjadi 16 jam dan menurut penjelasan di atas

keuntungan akan naik sebesar $\frac{5}{6}$ sehingga dari 27,5 menjadi 28,34,) dapat pula dicari dengan bantuan matrik ini. Untuk lebih jelasnya, perhatikan perhitungan berikut ini :

NK sebelumnya

NK Setelah perubahan

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Perhatikan ! Nilai kanan / kapasitas batasan 2 atau mesin B naik menjadi 16, maka keuntungan akan bertambah sebesar $\frac{5}{6}$ sehingga dari 27,5 menjadi 28,34, benarkah ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 5/9 \times 16 + -1/3 \times 30 \\ 0 \times 8 + 1/3 \times 16 + 0 \times 30 \\ 0 \times 8 + -5/18 \times 16 + 1/6 \times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \ 8/9 \\ 5 \ 1/3 \\ 5/9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow X2 \\ \rightarrow X1 \end{matrix}$$

Apabila nilai X1 dan X2 tersebut dimasukkan ke fungsi tujuan Primal/simplex akan diperoleh keuntungan :

$$\begin{aligned} Z &= 3X1 + 5X2 \\ &= 3(5/9) + 5(5 \ 1/3) \\ &= 28,34 \rightarrow \text{Jadi terbukti memang keuntungan akan bertambah sebesar } \frac{5}{6} \text{ menjadi } 28,34 \end{aligned}$$

Begitu pula bila perubahan terjadi pada koefisien fungsi tujuan. Misalkan karena suatu sebab, keuntungan per unit X1 dan X2 tidak lagi 3 dan 5, tapi menjadi 4 dan 6, maka keuntungan perusahaan yang baru adalah :

$$(0, 6, 4) \begin{pmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{pmatrix} =$$

$$(0x1 + 6x0 + 4x0; \quad 0x5/9 + 6x1/3 + 4x-5/18; \quad 0x.1/3 + 5x0 + 3x1/6) = (0, 8/9, 2/3)$$

Jadi tambahan keuntungan yang terjadi apabila kapasitas setiap mesin ditambah 1 unit tidak lagi 0, $\frac{5}{6}$, dan $\frac{1}{2}$, tetapi 0, $\frac{8}{9}$ dan $\frac{2}{3}$. Dan apabila dimasukkan ke Fungsi tujuan Dual untuk mendapatkan hasil adalah : $Y = 8(0) + 15(8/9) + 30(2/3) = 33,34 \rightarrow$ Keuntungan yang baru.