MATA KULIAH MATEMATIKA SISTEM INFORMASI 2

[KODE/SKS : IT011215 / 2 SKS]

LINIER PROGRAMMING

Formulasi Masalah dan Pemodelan

Pengertian Linear Programming

- Linear Programming (LP) adalah salah satu teknik riset operasi yang paling banyak dipergunakan dalam prakti dan paling dikenal karena mudah dipahami.
- LP menggunakan model matematika linear. Dengan menggunakan teknik LP, kita bisa mencapai “output” yang optimum (= maksimum atau minimum) berdasarkan “input” yang terbatas.

Metode-metode yang ada di Linear Programing :

- **Grafik** →Kendala: hanya untuk perusahaan yang memproduksi hanya 2 produk.
- **Simplex**
- **Dualitas** → Digunakan bila terjadi perubahan kapasitas.

TUJUAN LINIER PROGRAMMING

Tujuan perusahaan umumnya:memaksimalisasi keuntungan, namun karena terbatasnya sumber daya, maka dapat juga perusahaan meminimalkan biaya

4 Ciri Khusus Linier Programming:

1. penyelesaian masalah mengarah pada pencapaian tujuan maksimisasi atau minimisasi
2. kendala yang ada membatasi tingkat pencapaian tujuan
3. ada beberapa alternatif penyelesaian
4. hubungan matematis bersifat linear

TUJUAN LINIER PROGRAMMING

5 syarat tambahan dari permasalahan linear programming (asumsi dasar), yaitu:

1. **certainty (kepastian)**: fungsi tujuan dan fungsi kendala sudah diketahui dengan pasti dan tidak berubah selama periode analisa.

2. **proportionality (proporsionalitas)**: proporsionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala.

3. **additivity (penambahan)**: aktivitas total sama dengan penjumlahan aktivitas individu.

4. **divisibility (bisa dibagi-bagi)** : solusi tidak harus merupakan bilangan integer (bilangan bulat), tetapi bisa juga berupa pecahan.

5. **non-negative variable (variabel tidak negatif):** Artinya bahwa semua nilai jawabanatau variabel tidak negatif.

Fungsi-Fungsi Dalam PL

1. Fungsi Tujuan (*objective function*)

Fungsi yang menyatakan tujuan yang akan dicapai, dapat berupa laba maksimal atau biaya minimal

2. **Fungsi Kendala (*contrains or subject to*)**

Fungsi yang menyatakan batasan atau kendala dari faktor produksi yang dimiliki

Simbol yang digunakan : <, >, =

3. Fungsi Status (status function)

Fungsi yang menyatakan bahwa setiap variabel yang terdapat di dalam model programasi linear tidak boleh negatif

Fungsi Matematika untuk Masing-masing Fungsi

1. **Fungsi Tujuan**
   Maks. Laba $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

2. **Fungsi Kendala**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_n
\end{aligned}
$$

3. **Fungsi Status**
   $x_1 ; x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. X_n \ge 0$

Bentuk Umum Model LP:

- Maksimum / Minimum : Z = Fungsi Tujuan
- dengan syarat : (≤ , = , ≥) Fungsi Batasan

Studi Kasus

Contoh 1

Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi: perakitan dan pemolesan. Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesan hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan untuk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan,Laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing Rp. 80.000 dan Rp. 60.000,-

Berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan?

Penyelesaian

Perumusan persoalan dalam bentuk tabel :

Proses	Waktu yang dibutuhkan per unit		Total jam tersedia
	Meja	Kursi	
Perakitan	4	2	60
Pemolesan	2	4	48
Laba/unit	80.000	60.000	

Perumusan persoalan dlm bentuk matematika:

Maks :Laba = 8X1 + 6 X2 (dalam satuan Rp.10. 000)

Dengan kendala:

$4X1 + 2X2 \leq 60$

$2X1 + 4X2 \leq 48$

$X1, X2 \geq 0$

Perumusan persoalan dalam model LP untuk contoh 1

1. **Definisi variabel keputusan:**

   Keputusan yg akan diambil adalah berapakah jumlah meja dan kursi yang akan dihasilkan. Jika meja disimbolkan dengan X1 dan kursi dengan X2, maka definisi variabel keputusan:

   X1 = jumlah meja yang akan dihasilkan (dalam satuan unit) X2 = jumlah kursi yang akan dihasilkan (dalam satuan unit)

2. **Perumusan fungsi tujuan:**

   Laba utk setiap meja dan kursi yg dihasilkan masing2 Rp. 80.000 dan Rp. 60.000. Tujuan perusahaan adalah untuk memaksimumkan laba dari sejumlah meja dan kursi yg dihasilkan. Dengan demikian, fungsi tujuan dapat ditulis: Maks.:Laba = 8X1 + 6X2 (dalam satuan Rp.10. 000)

Perumusan persoalan dalam model LP untuk contoh 1 (Lanjutan)

3. **Perumusan Fungsi Kendala**

   a. **Kendala pada proses perakitan**

   Utk menghasilkan 1 buah meja diperlukan waktu 4 jam dan untuk menghasilkan 1 buah kursi diperlukan waktu 2 jam pada proses perakitan. Waktu yang tersedia adalah 60 jam.

   $$4X1 + 2X2 \leq 60$$

   b. **Kendala pada proses pemolesan**

   Untuk menghasilkan 1 buah meja diperlukan waktu 2 jam dan untuk menghasilkan 1 buah kursi diperlukan waktu 4 jam pada proses pemolesan. Waktu yang tersedia adalah 48 jam.

   $$2X1 + 4X2 \leq 48$$

4. **Kendala non-negatif**

   Meja dan kursi yang dihasilkan tidak memiliki nilai negatif.

   $$X1, X2 \geq 0$$

Studi Kasus

Contoh 2: Masalah Diet

Untuk menjaga kesehatan seseorang harus memenuhi kebutuhan minimum perhari akan beberapa zat makanan. Misalnya ada 3 zat makanan yang dibutuhkan yaitu : kalsium (I) , protein (II) , dan vitamin A(III) yang harga , zat yang terkandung dan kebutuhan minimum perhari akan zat makanan tersebut pada table berikut :

	Makanan			Kebutuhan Minimum
	I	II	III	
Harga/unit	0.5	0.8	0.6	
Kalsium	5	1	0	8
Protein	2	2	1	10
Vitamin A	1	5	4	22

Masalahnya bagaimana kombinasi ketiga jenis makanan itu akan memenuhi kebutuhan minimum perhari dan memberikan biaya terendah?

Variabel : x_1 = jumlah makanan I

x_2 = jumlah makanan II

x_3 = jumlah makanan III

- Fungsi Tujuan :

Minimum : $Z = 0.5\,x_1 + 0.8\,x_2 + 0.6\,x_3$

- Fungsi Batasan :

$$5x_1 + x_2 \geq 8(kalsium)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10(\mathrm{Pr}\,otein)$$

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 22(Vita\,\min)$$

- Contoh 3 : (Bakery)

Suatu bakery membuat roti yang berisi daging dari suatu campuran daging dan ayam tanpa lemak. Daging sapi mengandung 80 persen daging dan 20 persen lemak dan harganya 80 rp /ons. Daging ayam mengandung 68 persen daging dan 32 persen lemak dan harganya 60 rp/ons. Berapa banyaknya masing-masing daging yang harus digunakan untuk tiap ons roti daging jika diinginkan untuk meminimumkan harganya dengan mempertahankan kandungan lemak tidak lebih dari 25 persen?

- Model LP :

x_1 = jumlah ons daging sapi
x_2 = jumlah ons daging ayam

F. Tujuan :Min: $Z = 80\,x_1 + 60x_2$

F. Batasan :

$$0.2x_1 + 0.32x_2 \le 0.25$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Solusi LP

- Metode untuk memecahkan program linier diataranya adalah **metode grafik dan metode simpleks**.
- Untuk memulai penerapan metode tersebut maka semua fungsi batasan ketidaksamaan harus ditransformasikan menjadi persamaan dan juga harus diketahui salah satu pemecahan yang feasible (layak)dan tidak negative.

Persyaratan Tidak Negatif

- Batasan yang memiliki bentuk : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \neg b_i$

Dimana $\neg$ adalah salah satu dari relasi ≤ ,≥ , = (tidak perlu sama untuk setiap I) konstanta b_i selalu dianggap tidak negatif

- Contoh : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq -3$

Dikalikan -1 jadi $-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 3$

Sehingga ruas kanan tidak negatif

- **Variabel Slack (Kurang) dan Surplus**

Variabel Slack (Kurang) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

Untuk diubah menjadi suatu persamaan dengan **menambah** sebuah variabel tak negatif baru pada ruas kirinya.

Contoh : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 3$

Diubah menjadi persamaan menjadi : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 3$

Variabel Surplus $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$

Untuk diubah menjadi suatu persamaan dengan **mengurangkan** sebuah variabel tak negatif baru pada ruas kirinya.

Contoh : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 3$

Diubah menjadi persamaan menjadi : $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 3$

- **Variabel buatan (artificial variable)**

- Pada ruas kiri setiap fungsi batasan yang tidak mengandung variabel slack dapat ditambahkan variabel buatan. Dengan demikian tiap fungsi pembatas akan mempunyai variabel slack dan buatan.
- Contoh: (***)

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 5$$
$$7x_1 + 8x_2 = 10$$

Persamaan

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 4x_2 - x_4 = 5$$
$$7x_1 + 8x_2 = 10$$

variabel buatan x_5 dan x_6

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 5$$
$$7x_1 + 8x_2 + x_6 = 10$$

- Solusi Awal yang feasible.

Setiap persamaan batasan akan mengandung variabel slack atau buatan. Solusi awal tak negatif bagi fungsi batasan diperoleh dengan menetapkan variabel slack dan buatan sama dengan ruas kanan dari fungsi kendala dan menetapkan semua variabel lainnya termasuk variabel surplus sama dengan nol.

Contoh: (***)

Solusi awal : $x_3 = 3, x_5 = 5, x_6 = 10$

- **Penalty Cost**

Penambahan var slack dan surplus tidak mengubah sifat fungsi batasan maupun tujuan. Oleh karena itu variabel tersebut dapat diikut sertakan pada fungsi tujuan dengan koefisien nol. Sedangkan variabel buatan mengubah fungsi fungsi batasan.Karena variabel buatan ini hanya dtambahkan pada salah satu ruas persamaan, maka system yang baru ekivalen dengan fungsi kendala yang lama jika dan hanya jika variabel buatannya nol.

Contoh kasus minimum & maksimum

- Seorang produsen memiliki 2 macam bahan mentah I dan II yang masing-masing tersedia sebanyak 8 satuan dan 5 satuan (ton, kuintal, dll). Dia memproduksi 2 macam produk yaitu produk A dan B. Berdasarkan data teknis, maka diketahui bahwa: 1 unit produk A memerlukan 2 unit bahan mentah I dan 1 unit bahan mentah II dan 1 unit produk B memerlukan 3 unit bahan mentah I dan 2 unit bahan mentah II. Berdasarkan hasil riset pemasaran, 1 unit produk A laku Rp 15 ribu dan 1 unit produk B laku Rp 10 ribu kalau dijual di pasaran. Berapa produksi barang A dan B agar jumlah hasil **maksimum/ minimum** dengan memerhatikan pembatasan bahwa bahan mentah yang dipergunakan dalam proses produksi tidak boleh melebihi persediaan yang ada. Bahan mentah I tidak boleh lebih dari 8 unit dan bahan mentah II tidak boleh lebih dari 5 unit.