

POSET & LATTICE

MATEMATIKA SISTEM INFORMASI 1



POSET (Partially Ordered Set)

Himpunan Terurut Parsial

- Suatu relasi biner dinamakan sebagai suatu relasi pengurutan tak lengkap atau relasi pengurutan parsial (*partial ordering relation*) jika ia bersifat **reflexive**, **anti-simetris**, dan **transitive**.

Refleksi : $aRa, \forall a \in S$

Antisimetri : Jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \notin R$,
kecuali ketika $a = b$

Transitif : jika aRb dan bRc , maka aRc

Misalkan A sebuah himpunan bilangan bulat positif dan R sebuah relasi biner pada A sedemikian rupa sehingga (a, b) ada di dalam R jika a membagi habis b .

- Karena jika a membagi habis b berarti b tidak membagi habis a kecuali $a = b$, R adalah sebuah relasi antisymmetric (tolak setangkup).
- Karena setiap bilangan bulat membagi habis dirinya sendiri, R merupakan suatu relasi reflexive (memantul).
- Karena jika a membagi habis b , dan b membagi habis c , maka a membagi habis c , R adalah sebuah relasi transitive (menghantar).

Dengan demikian R adalah sebuah relasi pengurutan parsial.



➤ Pasangan $\langle A, R \rangle$ disebut himpunan terurut parsial / partially ordered set atau POSET.

➤ **Notasi relasi POSET :**

“ \leq ”, artinya “mendahului”

“ $a \leq b$ ”, artinya “a mendahului b”

CONTOH

Himpunan Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif. Relasi \leq (kurang atau sama dengan) adalah sebuah parsial order pada Z^+ . Hal ini berlaku pula untuk relasi \geq .

Jawab :

Bila (a,b) ada didalam R jika $a \leq b$.

Karena setiap bilangan bulat = dirinya sendiri \rightarrow
refleksi (memantul)

Karena $a \leq b$ dan $b \not\leq a$ kecuali $a = b \rightarrow$ **anti-simetris**

Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c \rightarrow$ **transitif (menghantar)**.

DIAGRAM HASSE

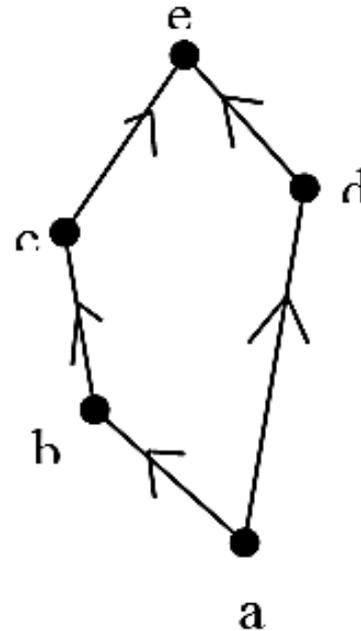
- Diagram Hasse dari POSET $\langle A, \leq \rangle$ digambarkan sebagai suatu graph tak berarah tanpa loop, dimana *node/simpul menunjukkan elemen dari A dan edge/garis menunjukkan relasi.*

Aturan membuat Diagram Hasse:

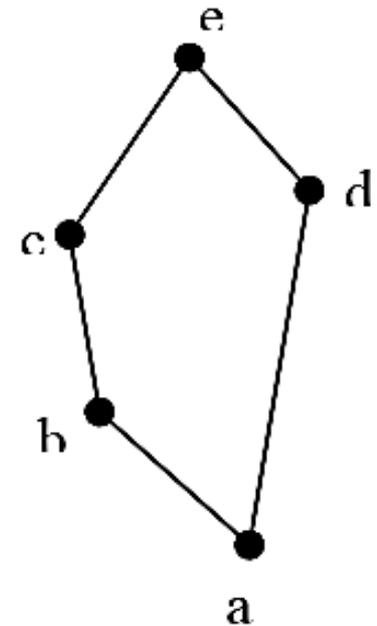
- Jika $a \leq b$ dan $a \neq b$, maka a terletak di bawah b .
- Jika $a \leq b$ dan tidak ada $c \in S$ sedemikian sehingga $a \leq c$ dan $b \leq c$ maka dari a ke b ditarik sebuah garis.
- Jika $a \leq b$ dan $a \leq c$ maka b dan c terletak pada level yang sama.

	a	b	c	d	e
a	[[[[[
b		[[[
c			[[
d				[[
e					[

(i)



(ii)



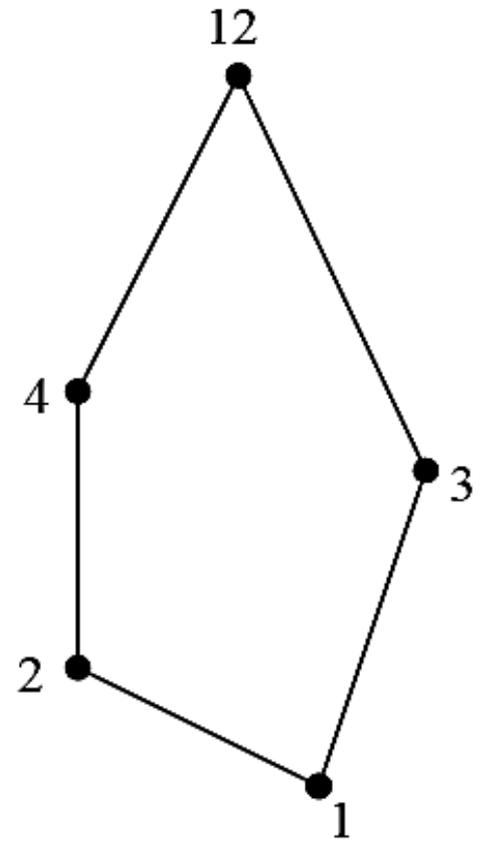
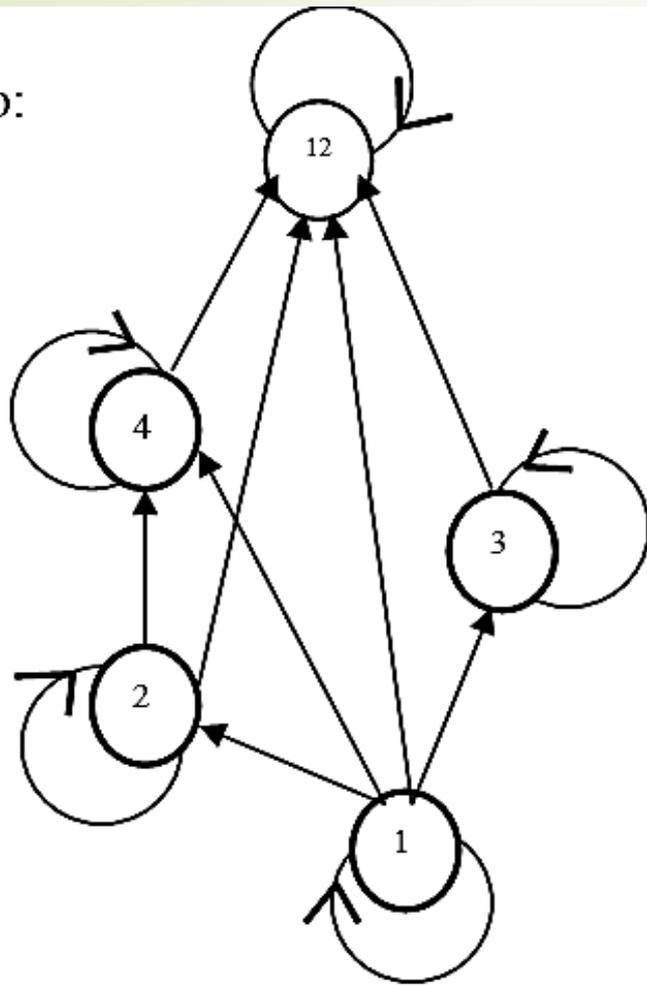
(iii)

- ❖ Karena relasi bersifat memantul (refleksive), kita dapat membuang panel-panel ke titik (-titik) nya sendiri. → lihat gambar (i) menjadi (ii).
- ❖ Karena relasi bersifat menghantar (transitive), kita dapat membuang panah antar titik-titik yang dihubungkan dengan serangkaian panah. → lihat gambar (ii) menjadi gambar (iii).

CONTOH

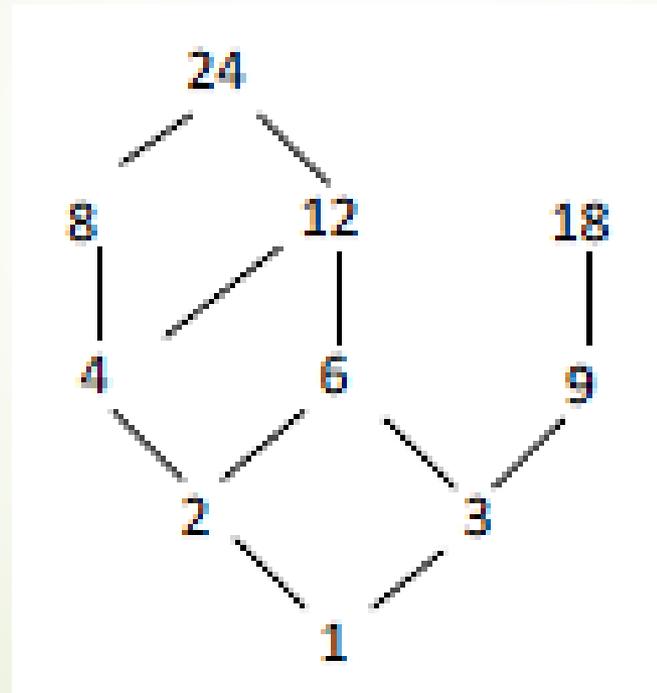
$A = \{ 1, 2, 3, 4, 12 \}$. Anggap pengurutan parsial dari pembagian pada himpunan A jika a dan $b \in A$, $a \leq b$ jika dan hanya jika $a \mid b$. Gambarkan diagram Hasse Poset (A, \leq)

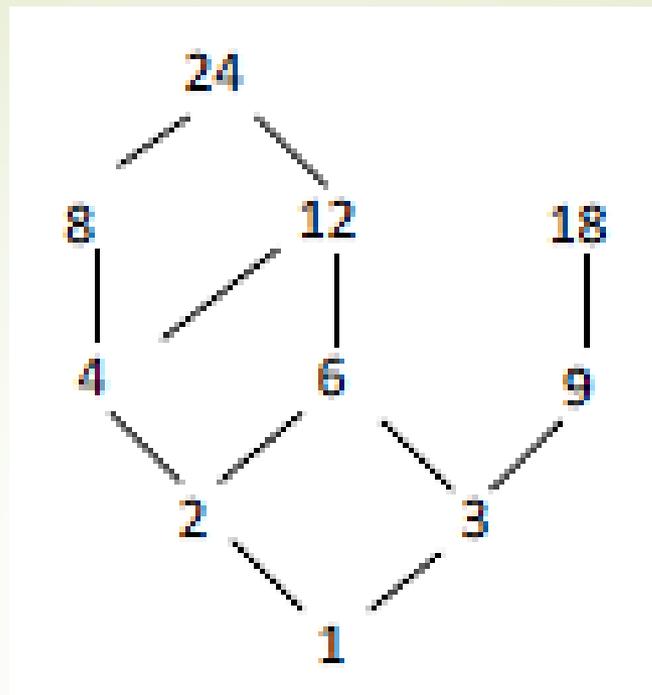
Jawab:



Contoh:

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ himpunan terurut **oleh pembagian**. Maka diagram hasse nya adalah:





Dari diagram diatas, diperoleh:

- 1 adalah elemen minimal dan elemen terkecil dari A
- 18 dan 24 adalah elemen maksimal dari A, karena tidak ada elemen A yang dapat dibagi oleh 18 maupun 24.
- A tidak memiliki elemen terbesar, karena tidak ada elemen A yang dapat dibagi oleh semua elemen lain di A.

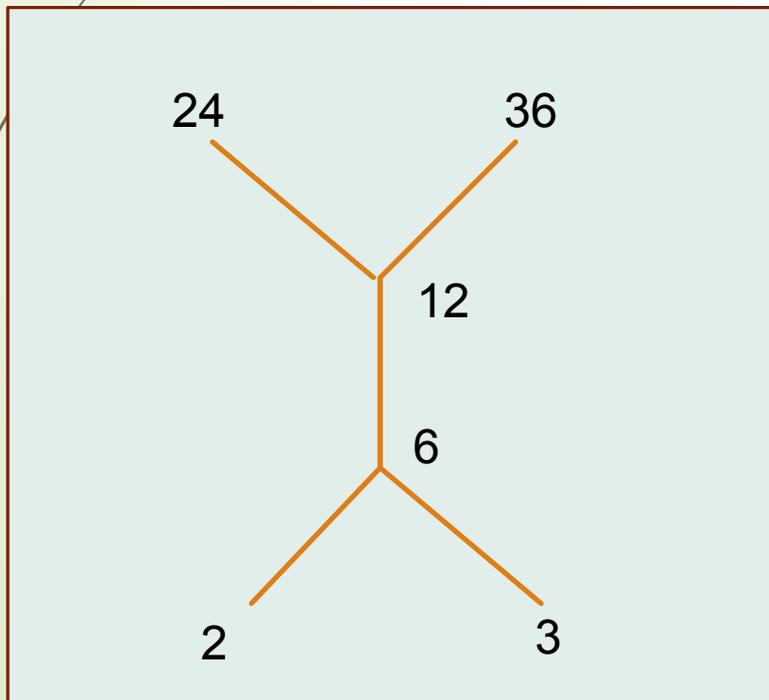
$X = \{ 2,3,6,12,24,36 \}$. Didefinisikan dengan $X \leq Y$ sebagai Y habis dibagi X , maka tentukan

Contoh:

- Gambar diagram hasse dari (X, \leq)
- Cari batas atas dari $(2,3)$
- Cari batas bawah dari $(24,36)$
- Cari batas atas terkecil (supremum) dari $(2,3)$
- Cari batas bawah terkecil (infimum) dari $(24,36)$

JAWAB:

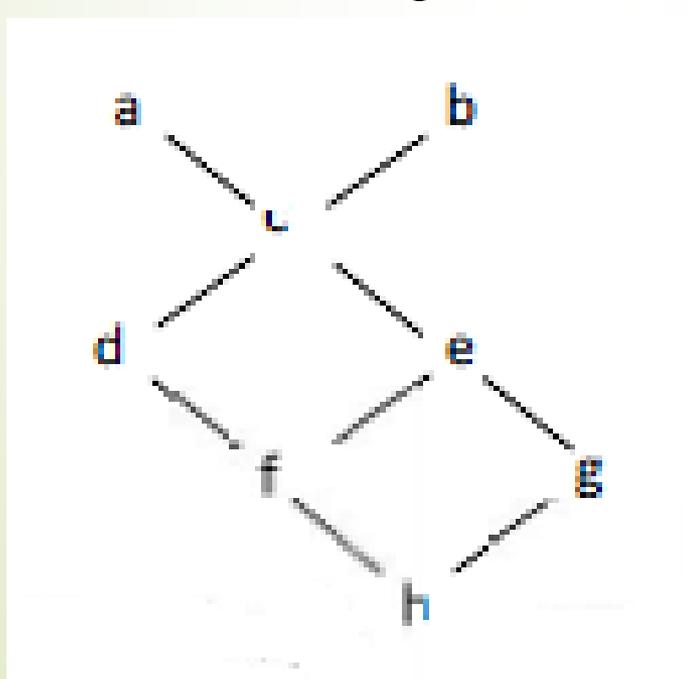
a)



- Batas atas dari $(2,3)$ adalah $6,12,24,36$.
- Batas bawah dari $(24,36)$ adalah $12,6,3,2$.
- Supremum dari $(2,3)$ adalah 6
- Infimum dari $(24,36)$ adalah 12

LATIHAN

1. Misalkan $B = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ himpunan terurut oleh pembagian. Maka diagram hasse nya adalah:
2. Diketahui diagram hasse sebagai berikut:



misalkan terdapat himpunan $M = \{d, e, g\}$, maka tentukanlah :

- Batas atas dari M ?
- Batas bawah dari M ?
- **Supremum**
infimum dari M ?

LATIHAN

3. Misalkan $X = \{ 2,5,10,20,40,100 \}$. Definisikan $X \leq Y$ sebagai Y habis di bagi X , maka tentukan:
- Diagram hasse untuk (X, \leq)
 - Tentukan batas atas dari $(2,5)$
 - Tentukan batas bawah dari $(40,100)$
 - Tentukan supremum dari $(2,5)$
 - Tentukan infimum dari $(40,100)$



FINISH...