# Logika Matematik

# EKSKLUSIF OR (XOR)

**DEFINISI : Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi "salah satu p atau q" ditulis $p \oplus q$ adalah proposisi yang bernilai benar jika tepat satu diantara p atau q BENAR, dan bernilai salah untuk kasus lainnya.**

**TABEL : TB Eksklusif OR**

| p | q | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**p:** **Tarif kamarnya murah**

**q:** **pelayanannya baik**

$$\sim q \oplus p$$

**Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.**

# Penterjemahan bahasa Indonesia Kedalam bentuk Logika

Contoh : Anda dapat mengakses internet dari kampus hanya jika anda jurusan informatika atau anda bukan mhs baru.

Penyelesaian : ada banyak cara untuk menyajikan klm ini dalam bentuk logika, salah satunya sbb:

Misalkan p : anda dapat mengakses internet dari kampus

q : anda mahasiswa jurusan informatika

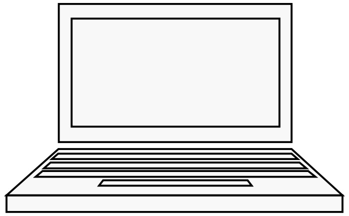
r : anda mahasiswa baru

Maka kalimat di atas dapat disajikan dalam simbol logika sbb :

$$\mathbf{q \vee (\neg r) \rightarrow p}$$

**Contoh 2 : Anda tidak diperbolehkan naik *roller coaster* jika tinggi anda Kurang dari 120 cm, kecuali anda sudah berumur di atas 15 tahun.Untuk latihan, coba ubah ke simbol logika.**

# Logika dan Operasi Bit pada sistem Komputer



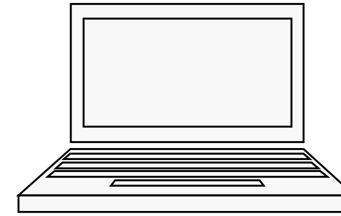
- **Bit berupa angka 1 dan 0. *String* merupakan barisan atau susunan beberapa bit. Komputer menggunakan sistem basis dua, yaitu ia menyajikan informasi dengan mengguna-kan bit 1 dan 0.**

- **Bit 1 digunakan untuk menyakjikan nilai benar (T), dan bit 0 digunakan untuk menyajikan nilai salah (F).**

- **Operasi bit berupa konektivitas pada logika, yaitu :**
  **$\wedge$ : "dan", $\vee$ : "atau", $\oplus$ : ekslusif OR**

- **Dua string dapat dioperasikan jika mereka mempunyai panjang yang sama.**

# Logika dan Operasi Bit pada sistem Komputer (Lanjutan)



**CONTOH : Diberikan dua string x dan y sbb :**

**x = 01 1011 0110 dan y = 11 0001 1101.**

**Tentukan hasil dari $x \wedge y$, $x \vee y$ dan $x \oplus y$.**

**PENYELESAIAN :**

$$
\begin{array}{ll}
x & = 01\ 1011\ 0110 \\
y & = 11\ 0001\ 1101 \\
\hline
x \wedge y & = 01\ 0001\ 0100
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x & = 01\ 1011\ 0110 \\
y & = 11\ 0001\ 1101 \\
\hline
x \vee y & = 11\ 1011\ 1111
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x & = 01\ 1011\ 0110 \\
y & = 11\ 0001\ 1101 \\
\hline
x \oplus y & = 10\ 1010\ 1011
\end{array}
$$

# Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{l}
\quad p_1 \\
\quad p_2 \\
\quad \vdots \\
\quad p_n \\
\hline
\therefore\ q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, $p_1$, $p_2$, …, $p_n$ disebut hipotesis (atau premis), dan $q$ disebut konklusi.

Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

**Definisi**. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

**Contoh**

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

*Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.*

adalah sahih.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan:

$p$ : Air laut surut setelah gempa di laut

$q$ : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

*Cara 1*: Bentuklah tabel kebenaran untuk $p$, $q$, dan $p \to q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | |
|---|---|---|---|
| **T** | **T** | **T** | (baris 1) |
| T | F | F | (baris 2) |
| F | T | T | (baris 3) |
| F | F | T | (baris 4) |

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis $p$ dan $p \to q$ benar, maka konklusi $q$ juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, $p$ dan $p \to q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini $q$ juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

**Tabel 1.16** $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ adalah tautologi

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $p \wedge (p \rightarrow q)$ | $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | F | T |

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

**Contoh :**

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

*"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"*

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

<u>Penyelesaian</u>:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | |
|---|---|---|---|
| T | T | T | (baris 1) |
| T | F | F | (baris 2) |
| F | **T** | **T** | (baris 3) |
| F | F | T | (baris 4) |

Dari tabel tampak bahwa hipotesis $q$ dan $p \rightarrow q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi $p$ salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

**Contoh :**

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

---

$\therefore$ 5 adalah bilangan prima

Penyelesaian:

Misalkan $p$ : 5 lebih kecil dari 4
$q$: 5 adalah bilangan prima.

Argumen:

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow \sim q \\
\sim p \\
\hline
\therefore\ q
\end{array}
$$

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \rightarrow \sim q$ | $\sim p$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F |
| T | F | T | T | F |
| F | **T** | F | **T** | **T** |
| F | F | T | **T** | **T** |

Tabel memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \rightarrow \sim q$ dan $\sim p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi $q$ salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi $q$ benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

- Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar ("5 adalah bilangan prima" adalah benar),

- tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu. ■

# Beberapa argumen yang sudah terbukti sahih

1. Modus ponen

$$p \to q$$

$$p$$

---------------

$$\therefore q$$

2. Modus tollen

$p \rightarrow q$

$\sim q$

---------------

$\therefore \sim p$

3. Silogisme disjungtif

$$p \vee q$$

$$\sim p$$

---------------

$$\therefore q$$

4. Simplifikasi

$$p \wedge q$$

---------------

$$\therefore p$$

5. Penjumlahan

$p$

----------------

$\therefore p \vee q$

6. Konjungsi

$p$

$q$

----------------

$\therefore p \wedge q$

# Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

**Aksioma** adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real $x$ dan $y$, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).
(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

**Teorema** adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*.

- **Lemma**: teorema sederhana yang digunakan untuk pembuktian teorema lain

- **Corollary**: teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.

- atau, *corollary* adalah teorema yang mengikuti teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
b. Untuk semua bilangan real $x$, $y$, dan $z$, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
*Corollary* ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika $n$ adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

# Contoh lainnya (dalam kalkulus)

- **Teorema**: $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$, dumana $a > 0$
- **Corollary**: $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$, dumana $a > 0$