MATA KULIAH MATEMATIKA TEKNIK 2

[KODE/SKS : KD042216 / 2 SKS]

"Ruang Vektor"

FIELD:

Ruang vektor **V** atas field skalar **K** adalah himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar.

- Himpunan tak kosong **V** disebut ruang vektor jika memenuhi

1. Untuk sebarang **u**,**v**$\in$V berlaku **u+v** $\in$ V
2. **u+v = v+u** **[sifat Komutatif]**
3. **u**+(**v**+**w**) = (**u**+**v**)+**w** **[sifat Asosiatif]**
4. Terdapat 0$\in$V **(vektor nol)** sehingga untuk setiap u$\in$V berlaku 0+**u**=**u**+0 $\in$ V
5. Untuk sebarang u$\in$V terdapat -u$\in$V sehingga **u**+(-**u**)= (-**u**)+**u** = 0 **[invers aditif]**

FIELD

6. Jika k adalah sebarang skalar dan $u \in V$, maka $k\mathbf{u} \in V$
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8. $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Contoh – contoh

1). V adalah himpunan polinom berderajat ≤ 2.

Didefinisikan operasi penjumlahan : jika $p_1(t) = a_{01} + a_{11}t + a_{21}t^2$

$p_2(t) = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2$ maka

$(p_1 + p_2)(t) = (a_{01} + a_{02}) + (a_{11} + a_{12})t + (a_{21} + a_{22})t^2$

$(kp_1)(t) = ka_{01} + ka_{11}t + ka_{21}t^2$, semua sifat ruang vector terpenuhi .

Jadi V merupakan ruang vector.

2) Himpunan A = { (x.y) | x € R , y € R }

Kita definisikan penjumlahan : (a,b) + (c,d) = (a,b)

.dan perkalian k (a,b) = (ka, kb)

Vektor Bebas Linier

Jika S = {v1, v2, … , vr} adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$$

Mempunyai paling tidak satu penyelesaian (trivial), yaitu

$$\mathbf{k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad . . . , \quad k_r = 0}$$

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka S disebut suatu himpunan yang **bebas secara linear**. Jika ada penyelesaian-penyelesaian lainnya, maka S disebut himpunan yang tak bebas secara linear.

Bergantung Linier

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ disebut bergantung *linier* (linearly dependent, tidak bebas linier) bila $\boxed{\text{terdapat skalar-skalar } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \text{ yang}}$ $\boxed{\text{tidak semua nol}}$ sedemikian sehingga $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m = 0 \ldots (*)$. ($0$ = vektor nol).

Pandang ruang vektor R^3 dengan $\boldsymbol{a} = [3,1,2]$, $b = [1,2,1]$, $c = [2,-1,1] \in R^3$. Ke-3 vektor tersebut adalah $\boxed{\text{bergantung linier}}$ karena :
$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \rightarrow \lambda_1[3,1,2] + \lambda_2[1,2,1] + \lambda_3[2,-1,1] = [0,0,0]$, ada λ yang $\neq 0$, yaitu misalnya $\boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1}$ memenuhi.

Contoh 1:

Diketahui $\bar{u} = (-1,\ 3,\ 2)$ dan $\bar{a} = (1,\ 1,\ -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab :

Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix}$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$k_1 = 0$, dan $k_2 = 0$.

Ini berarti ū dan ā adalah saling bebas linear.

Contoh 2 :

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

Jawab :

Tulis :

$$\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 mrp solusi tak hingga banyak

Jadi

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

Contoh 3 :

Misalkan diketahui R3 ruang vektor dengan u = [3,1,2] ,
v = [1,2,1] dan w = [2,-1,1] € R3 .
Selidiki apakah ketiga vektor tersebut **bebas linier atau bergantung linier** ?

<u>Jawab:</u>

k_1u + k_2v + k_3w = 0
k_1 [3,1,2] + k_2 [1,2,1] + k_3 [2,-1,1] =0

Terdapat skalar yang tidak nol yaitu k1 =-1 , dan k2=1 serta k3=1
Yang memenuhi persamaan tersebut
Jadi ketiga vektor **bergantung linier.**

Contoh 4:

Misalkan diketahui vektor u= [2,3] dan v= [1,3] Selidiki apakah kedua vektor tersebut **bebas linier atau bergantung linier** :

Jawab:

$k_1[2,3] + k_2[1,3]$

$2k_1 + k_2 = 0$

$3k_1 + 3k_2 = 0$ >>> $k_1 = k_2 = 0$

Jadi kedua vektor bebas linier.

Teorema :
Jika sebagian himpunan n vektor [u_1,u_2 ,..,..,…,u_n] bergantung linier, Maka keseluruhan n vektor tersebut adalah bergantung linier.

Contoh :

a = [2,3,1,4], b = [6,9,3,12] , c = [2,0,3,1] ,
d = [0,0,1,4]

Maka karena **a dan b kelipatan** mereka bergantung linier sehingga **vektor-vektor a,b,c, d bergantung linier**

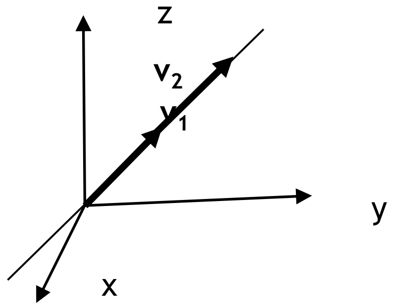
Interpretasi Geometrik dari Kebebasan Linear

Kebebasan linear mempunyai suatu interpretasi geometrik yang berguna dalam R^2 dan R^3 :

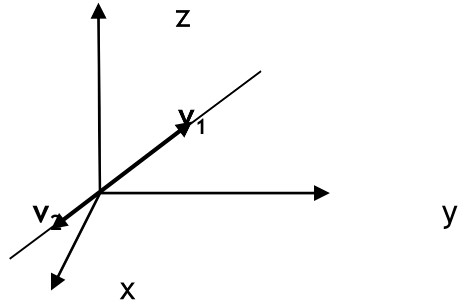
- Dalam R^2 atau R^3, suatu himpunan dua vektor bebas secara linear jika dan hanya jika vektor-vektor tersebut tidak terletak pada garis yang sama jika keduanya ditempatkan dengan titik-titik pangkalnya di tititk asal (Gambar 1).

- Dalam R^3, suatu himpunan tiga vektor bebas secara linear jika dan hanya jika vektor-vektor tersebut tidak terletak pada bidang yang sama jika ketiganya ditempatkan dengan titik-titik pangkalnya pada titik asal (Gambar 2).

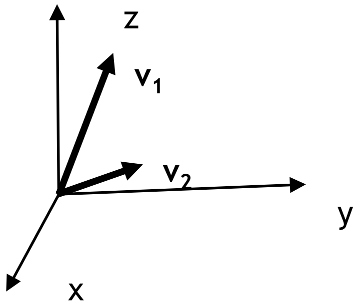
Gambar 1



Tak bebas secara linear

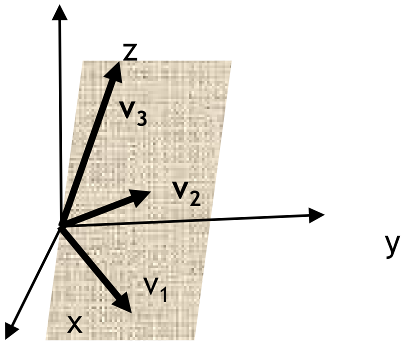


Tak bebas secara linear

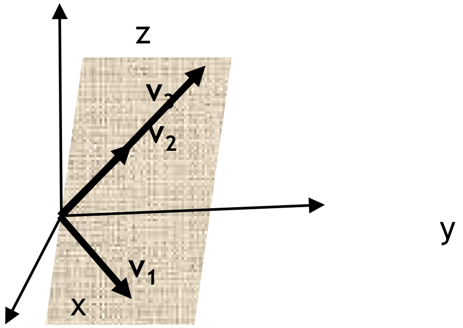


Bebas secara linear

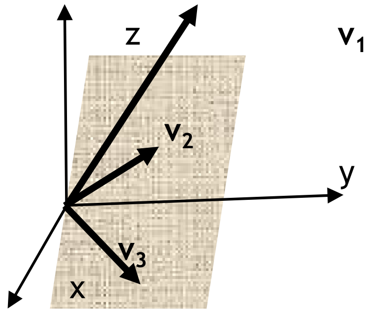
Gambar 2



Tak bebas secara linear



Tak bebas secara linear



Bebas secara linear

Jumlah Vektor	Bebas secara linier (Jika dan hanya jika)	Bebas secara Geometri (Jika dan hanya jika)
2 buah vektor	tidak satupun dari vektor tersebut yang merupakan penggandaan skalar dari vektor lainnya	tidak terletak pada garis yang sama jika diposisikan dengan titik-titik pangkalnya di titik asal
3 buah vektor	tidak satupun dari vektor tersebut yang merupakan kombinasi linear dari dua vektor lainnya	ketiga vektor tersebut tidak terletak pada bidang yang sama jika ketiganya diletakkan dengan titik-titik pangkalnya pada titik asal

Kombinasi Linear

- Suatu vektor w disebut kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jika bisa dinyatakan dalam bentuk

  $w = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$

  dengan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ skalar

<u>CONTOH 1</u>

Diketahui u=(1,2,-1) dan v=(6,4,2) dalam R^3. Apakah w=(9,2,7) merupakan kombinasi linear dari u dan v?

PENYELESAIAN (1)

- $w=k_1u+k_2v$

$(9,2,7)=k_1(1,2,-1)+k_2(6,4,2)$

$(9,2,7)=(k_1,2k_1,-k_1)+(6k_2,4k_2,2k_2)$

$(9,2,7)=(k_1+6k_2,2k_1+4k_2,-k_1+2k_2)$

$k_1+6k_2=9$

$2k_1+4k_2=2$

$-k_1+2k_2=7$

Didapat $k_1=-3, k_2=2$

Jadi $w=-3u+2v$

PENYELESAIAN (2): Operasi Eliminasi Gauss Persamaan linier

STEP

I

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

II

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 2} \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 2} \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

III

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ \boxed{-1 \quad 2 \quad 7} \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{vmatrix}$$

IV

X + 6 y =9
Y =2
Y=k_2=2

X + 6 (2) =9
X +12 = 9
X = -3
X=k_1=-3

Didapat **k_1=-3, k_2=2**
Jadi **w=-3u+2v**

Contoh: Misal $\bar{u}$ = (2, 4, 0), dan $\bar{v}$ = (1, –1, 3)

adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor $\bar{a}$ = (4, 2, 6) merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

Jawab :

a. Tulis $k_1\overline{u} + k_2\overline{v} = \overline{a}$

akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dipenuhi.

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ 1 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Baris ketiga bernilai nol, berarti terdapat penyelesaian

Dengan demikian,

$\overline{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$

atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

Misal $\bar{u}$ = (2, 4, 0), dan $\bar{v}$ = (1, –1, 3) adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor $\bar{b}$ = (1, 5, 6) merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

Jawab

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right)$$

Baris ketiga tidak nol, sehingga penyelesaian tidak konsisten

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah tidak konsisten

(tidak mempunyaisolusi).

Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi

➔ **b** tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari **u** dan **v**

Contoh :

Misalkan, **u** = [2,-1,3], **v** = [1,2,-2], apakah **x** = [8,1,5] kombinasi linier dari **u** dan **v**.

Jawab

Perhatikan kombinasi linier $\mathbf{x} = k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}$

$$[8,1,5] = k_1[2,-1,3] + k_2[1,2,-2] \Rightarrow \mathbf{x} = 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Dari kesamaan vektor diperoleh

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 &= 8 \\ -k_1 + 2k_2 &= 1 \\ 3k_1 - 2k_2 &= 5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= 3 \\ k_2 &= 2 \end{aligned}$$

BASIS DAN DIMENSI

Basis

Andaikan V adalah sembarang ruang vektor dan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,…,$\mathbf{v}_n$} adalah himpunan berhingga vektor-vektor pada V, S dikatakan basis untuk ruang V jika :

- S bebas linier
- S membangun V

Dimensi

Sebuah ruang vektor dikatakan berdimensi berhingga, jika ruang vektor V mengandung sebuah himpunan berhingga vektor S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,…,$\mathbf{u}_n$} yang membentuk basis. Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis V.

Contoh

Misalkan S = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,$\mathbf{u_3}$} dimana $\mathbf{u_1}$=[1,2,2], $\mathbf{u_2}$=[2,1,2] dan $\mathbf{u_3}$=[1,3,3]. Apakah S basis untuk R^3.

Jawab

Misalkan $\mathbf{x}$=[x_1,x_2,x_3] vektor di R^3, bentuk kombinasi linier :

$$k_1\mathbf{u_1} + k_2\mathbf{u_2} + k_3\mathbf{u_3} = \mathbf{x}$$

$$k_1\,[1,2,1] + k_2[2,1,2] + k_3\,[1,3,4] = [x_1,x_2,x_3]$$

Dari kesamaan vektor dihasilkan sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + k_3 &= x_1 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= x_2 \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= x_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \det(u) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Karena **mempunyai determinan minus ~ 0= bebas linier**, jadi S adalah basis untuk R^3.

Selidikilah bebas linier atau bergantung linier himpunan vektor-vektor berikut :

1. Diketahui 2 vector, u =[2,1,1] , v = [2,1,3]. Apakah bebas linier
2. Diketahui R3 ruang vektor dengan u = [6,2,4] , v = [1,2,1] dan w = [4,-2,2] € R3.
3. Selidiki apakah keempat vektor di bawah ini bebas linier atau bergantung linier. a = [2,3,1,4], b = [6,9,3,12] , c = [3,0,8,1] , d = [0,5,7,4].
4. Diketahui $\bar{u} = (-1, 3, 2)$ dan $\bar{a} = (1, 1, -1)$

   Apakah saling bebas linear di R^3

5. Diketahui u=(1,2,-1) dan v=(6,4,2) dalam R^3. Apakah w=(4,-1,8) merupakan kombinasi linear dari u dan v?

6. Misalkan, **u** = [2,-1,3], **v** = [1,2,-2], apakah **x** = [8,1,5] kombinasi linier dari **u** dan **v**.

7. Misal $\bar{u} = (2, 4, 0)$, dan $\bar{v} = (1, -1, 3)$

adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas

a. $\bar{a} = (4, 2, 6)$ b. $\bar{b} = (1, 5, 6)$

c. $\bar{c} = (0, 0, 0)$